http://www.uokonline.com

This question paper contains 8+2 printed pages]

1519

B.A./B.Sc. (Part-I) Examination, 2019

MATHEMATICS

Paper I

(Number Theory and Abstract Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : (Science : 50/Arts : 44)

This question paper contains ***three*** *sections as under :*

Section-A खण्ड 'अ' ***Max. Marks-5***

(Science/Arts)

This section contains ***one*** *compulsory question with* ***10*** *parts, having* ***2*** *parts from each unit, short answer in* ***20*** *words for each part.* ***All*** *questions carry equal marks.*

इस खण्ड में एक अनिवार्य प्रश्न है जिसमें प्रत्येक इकाई से ***2*** *लघु प्रश्न लेते हुए कुल* ***10*** *लघु प्रश्न होंगे। प्रत्येक लघु प्रश्न का उत्तर* ***20*** *शब्दों से अधिक में न हो।* ***सभी*** *प्रश्नों के अंक समान हैं।*

http://www.uokonline.com

Section-B खण्ड 'ब' ***Max. Marks-25***

(Science/Arts)

This section contains ***10*** *questions having* ***2*** *questions from each unit. Answer* ***5*** *questions (****250*** *words each) selecting* ***one*** *question from each unit.* ***All*** *questions carry equal marks.*

इस खण्ड में प्रत्येक इकाई से ***2*** *प्रश्न लेते हुए कुल* ***10*** *प्रश्न हैं। प्रत्येक इकाई से* ***एक*** *प्रश्न का चयन करते हुए, कुल* ***5*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर* ***250*** *शब्दों से अधिक न हो।* ***सभी*** *प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Section-C खण्ड 'स' ***Max. Marks-***

(Science-20/Arts-14)

This section contains ***4*** *descriptive type questions (questions may have sub-divisions) covering all units but not more than one question from each unit. Answer any* ***two*** *questions (****500*** *words each).* ***All*** *questions carry equal marks.*

इस खण्ड में ***4*** *प्रश्न वर्णनात्मक होंगे। (प्रश्नों के उप-भाग भी हो सकते हैं) जो सभी इकाइयों में से दिये जायेंगे, किन्तु एक इकाई से एक से अधिक प्रश्न नहीं होगा। किन्हीं* ***दो*** *प्रश्नों के उत्तर दिये जाने हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर* ***500*** *शब्दों से अधिक न हो।* ***सभी*** *प्रश्नों के अंक समान हैं।*

http://www.uokonline.com

Section A/खण्ड-अ

1. (*i*) State fundamental theorem of arithmetic.

अंकगणित की मूलभूत प्रमेय का कथन कीजिए।

(*ii*) If p is prime then prove that $\phi(p) = (p - 1)$ where $\phi(n)$ is Euler's phi-function.

यदि p एक अभाज्य संख्या है तो सिद्ध कीजिए कि $\phi(p) = (p - 1)$ जहाँ $\phi(n)$ आयलर फाई फलन है।

(*iii*) Define order of element of a group.

समूह में किसी अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिए।

(*iv*) Define Cyclic group.

चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए।

(*v*) Explain simple group with an example.

एक उदाहरण सहित सरल समूह को समझाइए।

http://www.uokonline.com

(*vi*) Define kernel of homomorphism.

समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिए।

(*vii*) Explain ring with zero divisors.

शून्य भाजक सहित वलय को समझाइए।

(*viii*) What do you mean by prime field ?

अभाज्य क्षेत्र से आप क्या समझते हैं ?

(*ix*) Define Maximal Ideal.

उच्चिष्ठ गुणजावली को परिभाषित कीजिए।

(*x*) Explain polynomial over integral domain.

पूर्णांकीय प्रांत पर बहुपद को समझाइए।

Section B/खण्ड-ब

UNIT-I/इकाई-I

2. Explain Euclidian algorithm for finding greatest common divisor of two positive integer and use it to find gcd of 2445 and 652.

http://www.uokonline.com

http://www.uokonline.com

महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने की यूक्लिडीयन कलन विधि को समझाइए व इसका प्रयोग करते हुए 2445 व 652 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

3. State Chinese remainder theorem and use it to find all solutions in Z_{60} such that :

$x \equiv 3 \bmod 4;\ x \equiv 2 \bmod 3;\ x \equiv 4 \bmod 5.$

चीनी शेष प्रमेय का कथन कीजिए व इसे प्रयोग में लेते हुए Z_{60} में सभी हल ज्ञात कीजिए ताकि :

$x \equiv 3 \bmod 4;\ x \equiv 2 \bmod 3;\ x \equiv 4 \bmod 5.$

UNIT-II/इकाई-II

4. If

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 3 & 1 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$$

then write permutation f as product of disjoint cycles and find the order of f.

http://www.uokonline.com

यदि

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 3 & 1 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$$

तो f को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में लिखिए व f की कोटि भी ज्ञात कीजिए।

5. Prove that every subgroup of a cyclic group is a cyclic group.

सिद्ध कीजिए कि एक चक्रीय समूह का प्रत्येक उपसमूह एक चक्रीय समूह होता है।

UNIT-III/इकाई-III

6. Prove that every subgroup of index 2 in a group is a normal subgroup.

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह में 2 सूचकांक वाला प्रत्येक उपसमूह एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

7. State and prove fundamental theorem of homomorphism.

समाकारिता की मूलभूत प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

http://www.uokonline.com

http://www.uokonline.com

8. Prove that necessary and sufficient condition for a subset S of ring (R, +, •) to be subring of R is that :

(*i*) $S + (-S) = S$

(*ii*) $SS \subseteq S$.

सिद्ध कीजिए कि वलय (R, +, •) के उपसमुच्चय S को R का एक उपवलय होने के लिए आवश्यक व पर्याप्त प्रतिबंध है : http://www.uokonline.com

(*i*) $S + (-S) = S$

(*ii*) $SS \subseteq S$.

9. Prove that characteristic of integral domain is either zero or a prime number.

सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकीय प्रांत का अभिलक्षण शून्य या अभाज्य संख्या होती है।

http://www.uokonline.com

10. Prove that Ideal I of commucative ring with identity element R is prime ideal if and only if $\frac{R}{I}$ is an integral domain.

सिद्ध कीजिए कि इकाई सहित क्रमविनिमय वलय R की गुणजावली I अभाज्य गुणजावली होती है यदि व केवल यदि $\frac{R}{I}$ एक पूर्णांकीय प्रांत हो।

11. If $f(x)$ and $g(x) \neq 0$ are any two polynomials over a field F, then prove that there exist unique polynomials $q(x)$ and $r(x)$ in F such that :

$$f(x) = q(x)\ g(x) + r(x)$$

where either $r(x) = 0$ or degree deg $r(x) <$ deg $g(x)$.

यदि $f(x)$ व $g(x) \neq 0$ क्षेत्र F पर कोई दो बहुपद हैं तो सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र F में दो बहुपद $q(x)$ व $r(x)$ इस प्रकार हैं कि :

$$f(x) = q(x)\ g(x) + r(x)$$

जहाँ या तो $r(x) = 0$ या deg $r(x) <$ deg $g(x)$.

http://www.uokonline.com

http://www.uokonline.com

Section C/खण्ड-स

12. (i) If $G = \{(a, b) | a, b \in R, a \neq 0\}$ and operation $\odot$ is defined as :

$$(a, b) \odot (c, d) = (ac, b + d)$$

then prove that $(G, \odot)$ is a group.

यदि $G = \{(a; b) | a, b \in R, a \neq 0\}$ व संक्रिया $\odot$ इस प्रकार परिभाषित है कि :

$$(a, b) \odot (c, d) = (ac, b + d)$$

तब सिद्ध कीजिए कि $(G, \odot)$ एक समूह है।

(ii) Prove that every group of order 4 is Abelian group.

सिद्ध कीजिए कि 4 कोटि का प्रत्येक समूह आबेली समूह होता है।

13. (i) Prove that union of any two subgroups of a group is a subgroup if and only if one of them is subset of other.

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होता है यदि व केवल यदि उनमें से एक दूसरे का उपसमुच्चय हो।

http://www.uokonline.com

(ii) Prove that order of element in a finite group is a divisor of order of group.

सिद्ध कीजिए कि परिमित समूह के प्रत्येक अवयव की कोटि समूह की कोटि की भाजक होती है।

14. Define Isomorphic group. State and prove Cayle's theorem.

तुल्यकारी समूह को परिभाषित कीजिए। केले प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

15. If $R = \{m + n\sqrt{2}; m, n \in Z\}$, then show that R is a commucative ring with identity element for simple addition and multiplication. Is it may be a field ?

यदि $R = \{m + n\sqrt{2}; m, n \in Z\}$, तब प्रदर्शित कीजिए कि सामान्य योगफल व गुणनफल के लिए R इकाई अवयव सहित क्रमविनिमेय वलय है। क्या यह एक क्षेत्र हो सकती है ?

http://www.uokonline.com