UA-1519

UA-1519

B.A./B.Sc. (Part-I) Examination, 2023

MATHEMATICS

Paper - I

NUMBER THEORY AND ABSTRACT ALGEBRA

Time allowed : **Three Hours**

Maximum Marks : **Science : 50 Marks**
Arts : 44 Marks

*This question paper contains **three** sections as under :*

SECTION-A
खण्ड–अ

1 (i) Write the statement of the fundamental theorem of Arithmetic.
अंक गणित की आधारभूत प्रमेय का कथन लिखिये ।

(ii) Define Abelian group.
आबेली समूह को परिभाषित कीजिए ।

(iii) Define order of an element of a group.
एक समूह के अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिए ।

(iv) Prove that every cyclic group is abelian.
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक चक्रीय समूह आबेली होता है ।

(v) Prove that every subgroup of an abelian group is a normal subgroup.
सिद्ध कीजिए कि आबेली समूह का प्रत्येक उपसमूह एक प्रसामान्य उपसमूह होता है ।

(vi) Define Kernel of Homomorphism.
समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिए ।

(vii) Define Simple ring.
सरल वलय को परिभाषित कीजिए ।

(viii) Define Division ring.
विभाग वलय को परिभाषित कीजिए ।

(ix) Define Maximal ideal.
उच्चिष्ठ गुणजावली को परिभाषित कीजिए ।

(x) If R/I is a Quotient Ring of R then prove that if R is commutative than R/I is also commutative.
यदि R/I वलय R का एक विभाग वलय है तो सिद्ध कीजिए कि यदि R क्रमविनिमेय है तो R/I भी क्रमविनिमेय होगा ।

https://www.pyqonline.com

SECTION-B
खण्ड–ब

UNIT - I
इकाई – I

2 Prove that the square of every number is of the form $3m$ or $3m + 1$.
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संख्या का वर्ग $3m$ या $3m + 1$ के रूप का होता है ।

3 Show that the set Q^+ of the positive rational numbers forms an abelian group for the operation * defined as

$$a * b = \frac{ab}{2}.$$

सिद्ध कीजिए कि धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q^+, संक्रिया * जो निम्न प्रकार से परिभाषित है के लिये एक क्रमविनिमेय समूह है

$$a * b = \frac{ab}{2}.$$

UNIT - II
इकाई – II

4 Find the order of each element of the group $(\{0,1,2,3,4\},+_5)$.
समूह $(\{0,1,2,3,4\},+_5)$ के प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिए ।

5 Prove that the order of every subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group.
सिद्ध कीजिए कि परिमित समूह के प्रत्येक उपसमूह की कोटि समूह की कोटि की भाजक होती है ।

UNIT - III
इकाई – III

6 Prove that intersection of any two normal subgroups of a group is a normal subgroup.
सिद्ध कीजिए कि समूह के किन्हीं को प्रसामान्य उपसमूह का सर्वनिष्ठ उस समूह का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है ।

7 If f is a homomorphism from a group G to G' with kernel K then prove that $K \triangleleft G$.
यदि f समूह G से G' पर एक समाकारिता है जिसकी अष्टि K है तो सिद्ध कीजिए कि $K \triangleleft G$ ।

UNIT - IV
इकाई – IV

8 Prove that every field is necessarily an integral domain but the converse is not necessarily true.
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र अनिवार्यतः प्रान्त होता है परन्तु इसका विलोम अनिवार्यतः सत्य नहीं होता है ।

https://www.pyqonline.com
https://www.pyqonline.com

9 Show that the set S of all 2×2 matrices of the form $\begin{bmatrix} a & o \\ b & o \end{bmatrix}$ $a,b \in Z$ is a left ideal but not a right ideal in the ring R of all 2×2 matrices over the set Z of integers.

$\begin{bmatrix} a & o \\ b & o \end{bmatrix}$ $a,b \in Z$ प्रकार के सभी मैट्रिसेज का समुच्चय S, पूर्णांकों पर 2×2 कोटि की सभी मैट्रिसेज की वलय R में एक वाम गुणजावली है परन्तु दक्षिण गुणजावली नहीं है ।

UNIT - V
इकाई – V

10 Prove that the ring $(z,+,\times)$ of integers is a principal ideal ring.
सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों की वलय $(z,+,\times)$ एक मुख्य गुणजावली वलय है ।

11 Prove that if R is a commutative ring, then the polynomial ring $R[x]$ is also commutative.
सिद्ध कीजिए कि यदि R एक क्रमविनिमेय वलय है तो बहुपद वलये $R[x]$ भी एक क्रमविनिमेय वलय होगा।

SECTION-C/खण्ड–स

12 (a) Prove that two integers are congruent modulo m iff they leave the same remainder when divided by m.
सिद्ध कीजिए कि दो पूर्णांक का समशेष मोड्यूलो m हैं यदिदि उनमें m से भाग देने पर समान शेषफल प्राप्त होता है ।

(b) Prove that if a, b are elements of a group G then the equations $ax = b$ and $ya = b$ have unique solutions in G.
सिद्ध कीजिए कि यदि a और b किसी समूह G के अवयव है तो समीकरण $ax = b$ तथा $ya = b$ के G में अद्वितीय हल होते है ।

13 If $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$\sigma = (134)(56)(2789)$

then find $\sigma^{-1}\rho\sigma$ and by expressing the permutation ρ as the product of disjoint cycles, find whether ρ is an even permutation or odd permutation. Also find its order. https://www.pyqonline.com

यदि $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma = (134)(56)(2789)$

तो $\sigma^{-1}\rho\sigma$ ज्ञात कीजिए तथा क्रमचय ρ को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल में व्यक्त करके बताइए कि ρ सम क्रमचय है या विषय क्रमचय ? इसकी कोटि भी ज्ञात कीजिए ।

14 (a) Find the quotient group G/H and also prepare its operation table when

$$G=(z,+),\ H=(4z,+)$$

विभाग समूह G/H ज्ञात कीजिए एवं इसकी संक्रिया सारणी भी बताइये जबकि

$$G=(z,+),\ H=(4z,+)$$

(b) Prove that the set

$$S=\{a+b\sqrt{2}\,/\,a,b\in Q\}$$ is a subfield of the field $(R,+,\times)$ of real numbers.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय

$$S=\{a+b\sqrt{2}\,/\,a,b\in Q\}$$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र $(R,+,\times)$ का एक उपक्षेत्र है ।

15 (a) Prove that the algebraic structure $(z_6,+_6,\times_6)$ is a commutative ring with unity where $z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$. Is it an integral domain ?

सिद्ध कीजिए कि बीजीय संरचना $(z_6,+_6,\times_6)$ एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय है जहाँ $z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$, क्या यह एक पूर्णांकीय प्रांत है ?

(b) Prove that an ideal I of a commutative ring R with unity is prime iff R/I is an integral domain.

सिद्ध कीजिए कि एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय R को कोई गुणजावली I अभाज्य गुणजावली होती है यदिदि R/I एक पूर्णांकीय प्राप्त है ।