This question paper contains 8+4 printed pages]

1519

B.A./B.Sc. (Part I) Examination, 2018

MATHEMATICS

Paper I

(Number Theory and Abstract Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : Science : 50/Arts : 44

This question paper contains ***three*** *sections as under :*

Section-A **खण्ड 'अ'** ***Max. Marks-***

UOKonline.com **(Science-5/Arts-5)**

This section contains ***one*** *compulsory question with* ***10*** *parts, having* ***2*** *parts from each unit, short answer in* ***20*** *words for each part.* ***All*** *questions carry equal marks.*

इस खण्ड में ***एक*** *अनिवार्य प्रश्न है जिसमें प्रत्येक इकाई से* ***2*** *लघु प्रश्न लेते हुए कुल* ***10*** *लघु प्रश्न होंगे। प्रत्येक लघु प्रश्न का उत्तर* ***20*** *शब्दों से अधिक न हो।* ***सभी*** *प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Section-B **खण्ड 'ब'** ***Max. Marks-25***

UOKonline.com **(Science/Arts)**

This section contains ***10*** *questions having 2 questions from each unit. Answer* ***5*** *questions (250 words each) selecting* ***one*** *question from each unit. All questions carry equal marks.*

इस खण्ड में प्रत्येक इकाई से ***2*** *प्रश्न लेते हुए कुल 10 प्रश्न हैं। प्रत्येक इकाई से* ***एक*** *प्रश्न का चयन करते हुए, कुल 5 प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर* ***250*** *शब्दों से अधिक न हो।* ***सभी*** *प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Section-C **खण्ड 'स'** ***Max. Marks-***

(Science-20/Arts-14)

This section contains ***4*** *descriptive type questions (question may have sub-divisions) covering all units but not more than one question from each unit. Answer any two questions (****500*** *words each).* ***All*** *questions carry equal marks.*

इस खण्ड में ***4*** *प्रश्न वर्णनात्मक होंगे (प्रश्न में उप-भाग भी हो सकते हैं) जो सभी इकाइयों में से दिये जायेंगे, किन्तु एक इकाई से एक से अधिक प्रश्न नहीं होगा। कोई दो प्रश्नों के उत्तर दिये जाने हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर* ***500*** *शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Section-A/खण्ड-अ 10×½=5

1. (*i*) Define relatively prime integers. ½

सापेक्षिक अभाज्य पूर्णांक संख्याओं को परिभाषित कीजिए।

(*ii*) Define Binary Operation. ½

द्विआधारी संक्रिया को परिभाषित कीजिए।

(*iii*) Explain cyclic permutation. ½

चक्रीय क्रमचय को समझाइये।

(*iv*) Define Normal Subgroup. ½

प्रसामान्य ग्रुप की परिभाषा दीजिए।

(*v*) Define Cosets. ½

सहसमुच्चय का परिभाषित कीजिए।

(*vi*) Explain group automorphism. ½

ग्रुप स्वाकारिता को समझाइये।

(*vii*) Define characteristic of ring. ½

वलय का अभिलक्षण क्या होता है ?

(*viii*) Define division ring. ½

विभाग वलय की परिभाषा दीजिए।

(*ix*) Define principal ideal. ½

मुख्य गुणजावली की परिभाषा दीजिए।

(*x*) Define polynomial over a ring. ½

वलय पर बहुपद की परिभाषा दीजिए।

Section B/खण्ड-ब

UNIT-I/इकाई-I

UOKonline.com

2. Examine whether the set of all matrices of the form :

$$\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}, \; a \in R, \; a \neq 0$$

forms a group under the matrix multiplication. 5

जाँच कीजिए कि

UOKonline.com

$$\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix},\ a \in R,\ a \neq 0$$

प्रकार की सभी मैट्रिसेज का समुच्चय मैट्रिक्स-गुणा के लिए ग्रुप है या नहीं।

Or **(अथवा)**

3. The relation "congruence modulo m" is an equivalence relation in the set of integers. 5

सिद्ध कीजिए सम्बन्ध ''सर्वांगसम समशेष m'' पूर्णांकों के समुच्चय में एक तुल्यता सम्बन्ध होता है।

UNIT-II/इकाई-II

4. If

$$\sigma = (1 \quad 7 \quad 2 \quad 6 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 4)$$

and

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

then prove that :

$$\rho\,\sigma\,\rho^{-1} = (\rho(1)\ \rho(7)\ \rho(2)\ \rho(6)\ \rho(3)\ \rho(5)\ \rho(8)\ \rho(4))$$. 5

यदि

$$\sigma = (1 \quad 7 \quad 2 \quad 6 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 4)$$

6.

तथा

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

तब सिद्ध कीजिए कि :

$$\rho\,\sigma\,\rho^{-1} = (\rho(1)\ \rho(7)\ \rho(2)\ \rho(6)\ \rho(3)\ \rho(5)\ \rho(8)\ \rho(4))$$

Or **(अथवा)**

5. If H and K are two finite subgroups of an abelian group G, then prove that : 5

$$O(HK) = \frac{O(H).O(K)}{O(H \cap K)}.$$

यदि H तथा K किसी आबेली ग्रुप G के दो परिमित उपग्रुप हों, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$O(HK) = \frac{O(H).O(K)}{O(H \cap K)}.$$

UNIT-III/इकाई-III

6. If $H \Delta G$ and $K \Delta G$ such that $H \cap K = \{e\}$ then show that $hk = kh$ for every $h \in H$, $k \in K$. 5

यदि $H \Delta G$ और $K \Delta G$ ऐसे हैं कि $H \cap K = \{e\}$, तो सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक $h \in H$ तथा कोई $k \in K$ के लिए $hk = kh$.

Or **(अथवा)**

7. State and prove Cayley theorem. 5

कैली प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

UNIT-IV/इकाई-IV

8. A finite commutative ring without zero divisors is a field. 5

शून्य भाजक रहित एक परिमित क्रमविनिमय वलय एक क्षेत्र होता है।

Or **(अथवा)**

9. If a be an element of a ring R, then prove that the normalizer :

$$N(a) = \{r \in R / ar = ra\}$$

of a is a subring of R. 5

यदि a किसी वलय R का अवयव हो, तो सिद्ध कीजिए कि R में a का प्रसामान्यक :

$$N(a) = \{r \in R / ar = ra\}$$

R का एक उपवलय है।

UOKonline.com

UNIT-V/इकाई-V

10. The ring of integers (Z, +, ×) is a principal ideal ring. 5

पूर्णांकों की वलय (Z, +, ×) एक मुख्य गुणजावली वलय है।

UOKonline.com

Or **(अथवा)**

11. If R is a ring and S be the set of all constant polynomials in R[x], then S is isomorphic to R i.e. $S \cong R$. 5

यदि R कोई वलय है तथा S बहुपद वलय R[x] में अचर बहुपदों का समुच्चय हो, तो S वलय R के तुल्यकारी होता है, अर्थात् $S \cong R$.

Section C/खण्ड-स

12. (*a*) Prove that :

$(a, bc) = 1 \Rightarrow (a, b) = 1$ and $(a, c) = 1$.

सिद्ध कीजिए कि यदि $(a, bc) = 1$, तब $(a, b) = 1$ तथा $(a, c) = 1$.

(*b*) Show that the set of all the matrices of the form :

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in R$$

is an abelian group for matrix multiplication. 10/7

सिद्ध कीजिए कि :

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in R$$

प्रकार की सभी मैट्रिसेज का समुच्चय मैट्रिक्स गुणा के लिए आबेली ग्रुप है।

13. (*a*) Prove that every permutation can be expressed as the product of disjoint cycles.

प्रत्येक क्रमचय असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, सिद्ध कीजिए।

(*b*) A non-void subset H of a group G is a subgroup iff : 10/7

$a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$

किसी समूह G का कोई अरिक्त उपसमुच्चय H एक उपसमूह होगा यदिदि :

$a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$

14. (a) A subgroup H of a group G is a normal subgroup if and only if :

$$H \Delta G \Leftrightarrow xHx^{-1} = H, \ \forall x \in G$$

किसी ग्रुप G का कोई उपग्रुप H एक प्रसामान्य उपग्रुप होता है यदिदि : UOKonline.com

$$H \Delta G \Leftrightarrow xHx^{-1} = H, \ \forall x \in G$$

(b) Prove that a ring R is without zero divisors iff the cancellation law hold in R. 10/7

सिद्ध कीजिए कि कोई वलय R शून्य भाजक रहित है यदिदि R में निरसन नियम सत्य है।

15. (a) Prove that the set $\{mx \mid x \in Z\}$ where m is an integer, is an ideal of the ring of integers $(Z, +, \times)$.

समुच्चय $\{mx \mid x \in Z\}$ जहाँ m एक पूर्णांक है। पूर्णांकों के वलय $(Z, +, \times)$ में एक गुणजावली है। सिद्ध कीजिए।

(b) If R is an [illegible]n, then the polynomial ring R[X] is also an integral domain. 10/7

यदि R एक पूर्णांकीय प्रान्त है तो बहुपद वलय R[X] भी पूर्णांकीय प्रान्त होता है।

https://pyqlelo.com