This question paper contains 8+4 printed pages]

1521

B.A./B.Sc. (Part-I)

Examination, 2018

MATHEMATICS

Paper III

(Vector Calculus & Coordinate Geometry)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : (Science-75/Arts-68)

*This question paper contains **three** sections as under :*

Section-A **खण्ड 'अ'** ***Max. Marks-***

(Science-10/Arts-5)

*This section contains **one** compulsory question with **10** parts, having **2** parts from each unit, short answer in **20** words for each part. **All** questions carry equal marks.*

*इस खण्ड में **एक** अनिवार्य प्रश्न है जिसमें प्रत्येक इकाई से **2** लघु प्रश्न लेते हुये कुल **10** लघु प्रश्न होंगे। प्रत्येक लघु प्रश्न का उत्तर **20** शब्दों से अधिक न हो। **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Section-B **खण्ड 'ब'** ***Max. Marks-35***

(Science/Arts)

*This section contains **10** questions having 2 questions from each unit. Answer **5** questions (250 words each) selecting **one** question from each unit. All questions carry equal marks.*

*इस खण्ड में प्रत्येक इकाई से **2** प्रश्न लेते हुए कुल 10 प्रश्न हैं। प्रत्येक इकाई से **एक** प्रश्न का चयन करते हुए, कुल 5 प्रश्नों के उत्तर देने हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **250** शब्दों से अधिक न हो। **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Section-C **खण्ड 'स'** ***Max. Marks-***

(Science-30/Arts-28)

*This section contains **4** descriptive type questions (questions may have sub-divisions) covering all units but not more than **one** question from each unit. Answer any **two** questions (**500** words each). **All** questions carry equal marks.*

*इस खण्ड में **4** वर्णनात्मक प्रश्न होंगे (प्रश्नों के उप-भाग भी हो सकते हैं) जो सभी इकाइयों में से दिये जायेंगे, किन्तु एक इकाई में से एक से अधिक प्रश्न नहीं होगा। किन्हीं **दो** प्रश्नों के उत्तर दिये जाने हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **500** शब्दों से अधिक न हो। **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं।*

https://pyqlearn.com

Section A/खण्ड-अ

1. (*i*) Define Solenoidal vector.

परिनालकीय सदिश को परिभाषित कीजिए।

(*ii*) Define definite integral.

निश्चित समाकल को परिभाषित कीजिए।

(*iii*) Write the equation of the chord of parabola $y^2 = 4ax$ whose middle point is (x_1, y_1).

परवलय $y^2 = 4ax$ की जीवा का समीकरण लिखिए जिसका मध्य बिन्दु (x_1, y_1) है।

(*iv*) Write the equation of the curve passing through the feet of the four normals drawn from the point (x_1, y_1) to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

UOKonline.com

दीर्घवृत्त पर बिन्दु (x_1, y_1) से खींचे गये चार अभिलम्बों के पादों से गुजरने वाले वक्र का समीकरण लिखिए।

(*v*) Write the equation of the hyperbola referred to its asymptotes as the axis of co-ordinates.

UOKonline.com

अनन्तस्पर्शियों को निर्देश अक्ष लेकर अतिपरवलय का समीकरण लिखिए।

(*vi*) Write the polar equation of a straight line which passes through the pole.

उस सरल रेखा का ध्रुवीय समीकरण लिखिए जो ध्रुव से गुजरती है।

(*vii*) Write the condition of orthogonality of two spheres.

दो गोलों की लाम्बिकता का प्रतिबन्ध लिखिए।

(*viii*) Write the condition that the cone $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ may have three mutually perpendicular generators.

शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ के तीन पारस्परिक समकोणिक जनक रेखाएँ होने का प्रतिबन्ध लिखिए।

UOKonline.com

(ix) Write the condition that the plane $lx + my + nz = p$ touches the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

UOKonline.com

समतल $lx + my + nz = p$ द्वारा दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ को स्पर्श करने की शर्त लिखिए।

(x) Write the equation of the enveloping cone of the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ with its vertex at (x_1, y_1, z_1). 1×10=10

शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के अन्वालोपी शंकु का समीकरण लिखिए जिसका शीर्ष बिन्दु (x_1, y_1, z_1) है।

Section B/खण्ड-ब

UNIT-I/इकाई-I

2. Show that the surface $5x^2 - 2yz = 9x$ is orthogonal to the surface $4x^2y + z^3 = 4$ at the point (1, –1, 2). 7

प्रदर्शित कीजिए कि सतह $5x^2 - 2yz = 9x$, सतह $4x^2y + z^3 = 4$ के बिन्दु (1, –1, 2) पर लम्बवत् है।

Or/अथवा

UOKonline.com

3. Evaluate $\int_S \vec{F}.\hat{n}\, dS$, where $\vec{F} = x\hat{i} - y\hat{j} + (z^2 - 1)\hat{k}$ and S is the cylinder formed by the surface $z = 0$, $z = 1$, $x^2 + y^2 = 4$. 7 6.

यदि $\vec{F} = x\hat{i} - y\hat{j} + (z^2 - 1)\hat{k}$ तथा S ऐसा बेलन हो जो $z = 0$, $z = 1$ तथा $x^2 + y^2 = 4$ द्वारा बनाया गया हो तो $\int_S \vec{F}.\hat{n}\, dS$ का मान ज्ञात कीजिए।

UNIT-II/इकाई-II

4. Find the locus of the poles of the chord of the parabola $y^2 = 4ax$ which length is 2C (Constant). 7

परवलय $y^2 = 4ax$ की उस जीवा के ध्रुव का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई 2C (अचर) है। 7.

Or/अथवा

5. Find the locus of the poles of the chord of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ which subtend a right angle at the centre of ellipse. 7

UOKonline.com

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की उस जीवा के ध्रुव का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो दीर्घवृत्त के केन्द्र पर समकोण अन्तरित करती है। 15

6. A circle cuts the rectangular hyperbola $xy = 1$ in the points (x_r, y_r), $r = 1, 2, 3, 4$, prove that : 7

$$x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4 = 1.$$

एक वृत्त आयताकार अतिपरवलय $xy = 1$ को (x_r, y_r), $r = 1, 2, 3, 4$ बिन्दुओं पर काटता है, तो सिद्ध कीजिए :

$$x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4 = 1.$$

Or/अथवा

7. Prove that the following equations represent the same conic : 7

$$\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta \text{ and } \frac{l}{r} = -1 - e\cos\theta.$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न समीकरण एक ही शांकव को निरूपित करते हैं :

$$\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta \text{ और } \frac{l}{r} = -1 - e\cos\theta.$$

8. Prove that the sphere which cuts two spheres $s_1 = 0, s_2 = 0$ orthogonally will also cut $ls_1 + ms_2 = 0$ orthogonally. 7

सिद्ध कीजिए कि यदि एक गोला, दो गोलों $s_1 = 0, s_2 = 0$ को लाम्बिक रूप से काटता है तो यह $ls_1 + ms_2 = 0$ को भी लाम्बिक रूप से कटेगा।

Or/अथवा

9. Prove that the semi-vertical angle of a right circular cone, admitting sets of three mutually perpendicular generators is $\tan^{-1}\sqrt{2}$. 7

यदि एक लम्बवृत्तीय शंकु के तीन जनक परस्पर लम्ब हैं, तो सिद्ध कीजिए कि अर्द्धशीर्ष कोण का मान $\tan^{-1}\sqrt{2}$ है।

UNIT-V/इकाई-V

10. Find the locus of the centre of sections of a conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ that are at a constant distance d from the centre. 7

केन्द्र से अचर दूरी d वाले शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के परिच्छेदों के केन्द्रों का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

https://pyqielo.com

Or/अथवा

11. Find the locus of the equal conjugate diameter of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 7

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ के सामान्य संयुग्मी व्यास का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

Section C/खण्ड-स

12. If the normal at P to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ meets the principal planes in G_1, G_2, G_3 respectively, show that :

$$PG_1 : PG_2 : PG_3 = a^2 : b^2 : c^2$$

यदि शांकवज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ पर बिन्दु P से खींची गई अभिलम्ब मुख्य तलों को क्रमशः बिन्दु G_1, G_2 तथा G_3 में मिले, तो प्रदर्शित कीजिए :

$$PG_1 : PG_2 : PG_3 = a^2 : b^2 : c^2$$

UOKonline.com

Find the locus of P if :

P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए यदि :

(*i*) $PG_1^2 + PG_2^2 + PG_3^2 = k^2$

(*ii*) $PG_1 + PG_2 + PG_3 = 3PQ$. 5+5+5=15

13. If the normal at $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ on the curve $\mu_r = 1 + e\cos\theta$ are concurrent then prove that :

यदि शांकव $\mu_r = 1 + e\cos\theta$ के बिन्दु $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ पर खींचे हुए अभिलम्ब संपाती हों तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\delta}{2}+\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2=0. \quad 15$$

14. Prove that :

(*i*) The eccentric angles of the extremities of two conjugate semi-diameters of an ellipse differ by a right angle. 10

(*ii*) The sum of the squares of conjugate semi-diameters of an ellipse is constant and equal to the sum of squares of the semi-axes of the ellipse. 5

15

सिद्ध कीजिए कि :

(i) दीर्घवृत्त के संयुग्मी अर्द्धव्यासों के सिरों के उत्केन्द्र कोणों में एक समकोण का अन्तर होता है।

(ii) दीर्घवृत्त के संयुग्मी अर्द्धव्यासों के वर्गों का योग अचर एवं दीर्घवृत्त के अर्द्धाक्षों के वर्गों के योग के बराबर होता है।

15. (i) Find the equation of the tangent plane and the normal to the surface $xyz = 4$ at the point (1, 2, 2). 10

(ii) If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $r = |\vec{r}|$, prove that :

$$\text{curl}\,(\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}$$

where $\vec{a}$ is a constant vector. 5

(i) पृष्ठ $xyz = 4$ के बिन्दु (1, 2, 2) पर स्पर्श तल एवं अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ और $r = |\vec{r}|$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{curl}\,(\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}.$$

जहाँ $\vec{a}$ एक अचर सादश है।

https://pyqlelo.com