This question paper contains 8+2 printed pages]

1522

UOKonline.com

B.A/B.Sc. (Part II) Examination, 2018

MATHEMATICS

Paper I

(Real Analysis)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : Science 75/Arts : 66

*This question paper contains **three** sections as under :*

Section-A खण्ड 'अ' **Max. Marks-10/5**

*This section contains **one** compulsory question with **10** parts, having **2** parts from each unit, short answer in **20** words for each part. **All** questions carry equal marks.*

इस खण्ड में एक अनिवार्य प्रश्न है जिसमें प्रत्येक इकाई से 2 लघु प्रश्न लेते हुए कुल 10 लघु प्रश्न होंगे। प्रत्येक लघु प्रश्न का उत्तर 20 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Section-B खण्ड 'ब' **Max. Marks-35**

*This section contains **10** questions having **2** questions from each unit. Answer **5** questions (250 words each) selecting **one** question from each unit. **All** questions carry equal marks.*

*इस खण्ड में प्रत्येक इकाई से 2 प्रश्न लेते हुये कुल 10 प्रश्न हैं। प्रत्येक इकाई से **एक** प्रश्न का चयन करते हुए कुल **5** प्रश्नों के उत्तर देने हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो। **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Section-C खण्ड 'स' **Max. Marks-30/26**

*This section contains 4 descriptive type questions (questions may have subdivisions) covering **all** units but not more than one question from each unit. Answer any **two** questions (500 words each). **All** questions carry equal marks.*

*इस खण्ड में 4 प्रश्न वर्णनात्मक होंगे। प्रश्न में उपभाग भी हो सकते हैं जो सभी इकाइयों में से दिये जायेंगे, किन्तु **एक** इकाई में से **एक** से अधिक प्रश्न नहीं होगा। कोई दो प्रश्नों के उत्तर दिये जाने हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 500 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Section A/खण्ड-अ

1. (*i*) Define ordered field.

क्रमित क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।

(*ii*) State nested intervals theorem.

अन्तरालों की घोंसला प्रमेय का कथन लिखिए।

(*iii*) Define oscillatory series.

दोलनीय श्रेणी को परिभाषित कीजिए।

(*iv*) Define Gauss's ratio test for infinite series.

अनन्त श्रेणियों के लिए गॉस अनुपात परीक्षण को परिभाषित कीजिए।

(*v*) Define limit point to a set.

समुच्चय के सीमा बिन्दु को परिभाषित कीजिए।

(*vi*) State Heine-Borel cutting attested theorem.

हैन-बोरेल का कटिंग एटेस्टेड (Cutting attested) का कथन लिखिए।

(*vii*) Write the Cauchy's definition of continuity of real function.

वास्तविक फलन के सांतत्य के लिए कॉशी की परिभाषा लिखिए।

(*viii*) Write the statement of Lagrange's theorem.

लाग्रांज प्रमेय का कथन लिखिए।

(*ix*) Define Riemann integral of a bounded real function.

परिमित वास्तविक फलन के लिए रीमान समाकल को समझाइए।

(*x*) Test the convergence of integral $\int_0^\infty e^{-x}\ dx$.

समाकल $\int_0^\infty e^{-x}\ dx$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Section B/खण्ड-ब

UNIT-I/इकाई-I

2. Prove that every complete ordered field R is an Archimedean ordered field.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक पूर्ण क्रमित क्षेत्र R एक आर्किमिडीय क्रमिक क्षेत्र होता है।

https://pyqlelo.com

3. Prove that every convergent sequence is bounded.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

UNIT-II/इकाई-II

4. Test the convergence of the following series :

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$x+\frac{2^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{3^3x^3}{\lfloor 3}+\frac{4^4x^4}{\lfloor 4}+\ldots\ldots$$

5. Prove that the following series are conditionally convergent :

सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित श्रेणी सप्रतिबन्ध अभिसारी है :

$$\frac{1}{\log 2}-\frac{1}{\log 3}+\frac{1}{\log 4}-\ldots\ldots$$

UNIT-III/इकाई-III

6. Prove that the set of rational number is countable.

सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय गणनीय होता है।

7. Construct Cantor's ternary set and write down its important properties.

केन्टर त्रिभागीय समुच्चय की रचना कीजिए तथा विशेषताएँ लिखिए। इसके महत्वपूर्ण गुण लिखिए।

UNIT-IV/इकाई-IV

8. Prove that if a function f is continuous in $[a,b]$ and $f(a) \neq f(b)$, then f assumes every value between $f(a)$ and $f(b)$ at least once in $[a, b]$.

सिद्ध कीजिए कि फलन f संवृत्त अन्तराल $[a,b]$ में संतत है तथा $f(a) \neq f(b)$, तो फलन उस अन्तराल में $f(a)$ तथा $f(b)$ के मध्य के प्रत्येक मान को कम से कम एक बार अवश्य ग्रहण करता है।

UOKonline.com

9. State and prove Bolzano-Weierstrass Cutting attested theorem.

बोल्जेनो-वाइर्स्ट्रास Cutting attested का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

Scanned by CamScanner

10. Iff f is bounded function defined on $[a, b]$ then prove that iff f will be Riemann integrable for every $\epsilon > 0$ there exists a partition $p \in P\ [a, b]$ such that :

$$U(f, p) - L(f, p) < \epsilon$$

यदि अन्तराल $[a, b]$ पर परिभाषित कोई फलन f हो, तो सिद्ध कीजिए कि f रीमान समाकलनीय होगा यदि और केवल यदि प्रत्येक $\epsilon > 0$ के लिए विभाजन $p \in P\ [a, b]$ का अस्तित्व इस प्रकार होगा कि :

$$U(f, p) - L(f, p) < \epsilon$$

11. Examine the convergence of the following integral :

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

निम्न समाकल के अभिसरण का परीक्षण कीजिये :

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

12. (a) Prove that the set Q of rational numbers is not a complete ordered field.

सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं है।

(b) Prove that the sequence $\langle x_n \rangle$, where $x_n = \frac{2n-7}{3n+2}, \forall\ n \in N$ is convergent.

सिद्ध कीजिए अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ जहाँ $x_n = \frac{2n-7}{3n+2}, \forall\ n \in N$ अभिसारी है।

13. (a) Show that the series $\frac{1}{1p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{3p} + \ldots\ldots$ converges if $p > 1$ and diverges if $p \leq 1$.

सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\frac{1}{1p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{3p} + \ldots\ldots$ अभिसारी है, यदि $p > 1$ तथा अपसारी है यदि $p \leq 1$.

https://pyqlelp.com

(b) Show that hypergeometric series :

प्रदर्शित कीजिए कि अतिज्यामितीय श्रेणी :

$$1+\frac{ab}{1.c}x+\frac{a(a+1)}{1.2}\frac{b(b+1)}{c(c+1)}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1.2.3.c(c+1)(c+2)}x^3+.....$$

converges if $c > (a + b)$ and diverges if $c \leq (a + b)$.

अभिसारी है यदि $c > (a + b)$ तथा अपसारी है यदि $c \leq (a + b)$ ।

14. (a) Prove that the following function is continuous but not differentiable at $x = 0$:

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन बिन्दु $x = 0$ पर संतत है, परन्तु अवकलनीय नहीं है :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin 1/n & x \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

(b) Show that function :

सिद्ध कीजिए कि फलन :

$$\text{for} = \begin{cases} x\dfrac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1x}}, & x \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad , & x = 0 \end{cases}$$

is continuous, but not differentiable at the point $x = 0$

बिन्दु $x = 0$ पर संतत है, किन्तु अवकलनीय नहीं है।

15. (a) Prove that every continuous function is Riemann integrable.

प्रत्येक संतत फलन रीमान समाकलनीय होता है।

(b) Prove that the Beta function $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ converges, if $m > 0$ and $n > 0$.

सिद्ध कीजिए कि बीटा फलन $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ अभिसारी है, यदि $m > 0$ तथा $n > 0$ ।

https://pyqlelo.com