Q-1522

B. A. / B. Sc. (Part - II) Examination, 2024

MATHEMATICS

Paper - I

Real Analysis

Time Allowed : **Three Hours**

Maximum Marks : **(Science : 75 / Arts : 66)**

Note : This question paper contains *three sections as under :*

Section-A ***खण्ड–अ*** ***Max. Marks - (Science : 10 / Arts : 5)***

This section contains ***one compulsory*** *question with* ***10*** *parts, having* ***2*** *parts from each unit, short answer in* ***20*** *words for each part. All questions carry* ***equal*** *marks.*

इस खण्ड में ***एक अनिवार्य*** *प्रश्न है, जिसमें प्रत्येक इकाई से* ***02 लघु प्रश्न*** *लेते हुये कुल* ***10*** *लघु प्रश्न होंगे। प्रत्येक लघु प्रश्न का उत्तर* ***20*** *शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक* ***समान*** *हैं।*

Section-B ***खण्ड–ब*** ***Max. Marks-35 (Science/Arts)***

This section contains ***10*** *questions having* ***02*** *questions from each unit. Answer* ***5*** *questions (****250*** *words each) selecting one question from each unit. All questions carry* ***equal marks.***

इस खण्ड में प्रत्येक इकाई से ***02*** *प्रश्न लेते हुये कुल* ***10*** *प्रश्न है। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुये कुल* ***05*** *प्रश्नों के उत्तर देने हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर* ***250*** *शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक* ***समान हैं।***

Section-C ***खण्ड–स*** ***Max. Marks (Science : 30 / Arts : 26)***

This section contains ***4*** *descriptive type questions (questions may have sub division) covering all units but not more than one question from each unit. Answer any two questions (500 words each). All questions carry equal marks.*

इस खण्ड में ***4*** *वर्णनात्मक प्रश्न होंगे । (प्रश्न में भाग भी हो सकते हैं जो सभी इकाइयों में से दिये जायेगें, किन्तु एक इकाई से एक से अधिक प्रश्न नहीं होगा। किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दिये जाने हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर* ***500*** *शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक* ***समान*** *हैं।*

SECTION - A

खण्ड – अ

1 (i) Write Archimedean property.

आर्किमिडीयन के प्रगुण को लिखिए।

(ii) Define Cauchy's convergence criterion of sequence.

अनुक्रम के कोशी अभिसरण परीक्षण को परिभाषित कीजिए।

(iii) Write Cauchy's condensation test.

कोशी संघनन परीक्षण लिखिए।

(iv) Define conditional convergence.

सप्रतिबन्ध अभिसरण को परिभाषित कीजिए।

(v) Define uncountable set.

अगणनीय समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define Closed set.

संवृत्त समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

(vii) Write Heine's definition of continuity.

सांतत्यता की हेनी परिभाषा लिखिए।

(viii) State Lagrange's mean value theorem.

लाग्रांज के मध्यमान प्रमेय का कथन लिखिए।

(ix) Define refinement of a partition.

विभाजन का शोधन को परिभाषित कीजिए।

(x) Write Abel's test for convergence of improper integral.

अनन्त समाकल के अभिसरण हेतु अबेल परीक्षण लिखिए।

SECTION - B

खण्ड – ब

UNIT - I

इकाई - I

2 If a, b are two rational numbers such that $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ is a rational number, then prove that $\sqrt{ab}$ is also a rational number.

यदि a, b दो ऐसी परिमेय संख्याए है कि $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ एक परिमेय संख्या है तो सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{ab}$ भी परिमेय संख्या है।

3 Prove that between any two different real numbers, there lie an infinite number of rational numbers.

सिद्ध करो कि किन्ही दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याये विद्यमान होती है।

https://pyqlelo.com

UNIT - II

इकाई - II

4 Test the convergence of following series :

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जांच कीजिए :

$1^1 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots\ldots + n^2x^{n-1} + \ldots\ldots$

5 Examine whether the following series is convergent or divergent :

जांच कीजिए कि निम्न श्रेणी अभिसारी है या अपसारी ?

$x + x^{1+\frac{1}{2}} + x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} + \ldots\ldots$

UNIT - III

इकाई - III

6 Prove that the product of two countable set is a countable.

सिद्ध करो कि दो गणनीय समुच्चयों का गुणन गणनीय समुच्चय होता है।

7 Prove that any subset S of R is on open set if and only if its complement S' is closed.

सिद्ध करो कि R का कोई उपसमुच्चय S विवृत्त समुच्चय है यदि और केवल यदि इसका पूरक समुच्चय S' संवृत्त है।

UNIT - IV

इकाई - IV

8 Prove that $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ if it exists, is unique.

सिद्ध करो कि यदि सीमा $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ उपस्थित है तो अद्वितीय होती है।

9 Prove that the following function f is continuous but non differentable at $x = 0$:

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन $x = 0$ पर संतत किन्तु अवकलनीय नहीं है :

$$f(x) = \begin{cases} x\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{if (यदि) } x \neq 0 \\ 0 & \text{if (यदि) } x = 0 \end{cases}$$

https://pyqlelo.com

UNIT - V

इकाई - V

10 If f is a function defined on [0, 1] as follows :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\neq \frac{1}{2}\\ 0 & \text{if } x=\frac{1}{2}\end{cases}$$ then show that

$f\in R$ [0, 1] and $\int_0^1 f(x)\,dx=1$

यदि फलन f, [0, 1] पर निम्नानुसार परिभाषित है :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{यदि } x\neq \frac{1}{2}\\ 0 & \text{यदि } x=\frac{1}{2}\end{cases}$$ तब सिद्ध करो कि

$f\in R$ [0, 1] तथा $\int_0^1 f(x)\,dx=1$

11 If m, n are positive integers, then examine the convergence of the following function :

यदि m, n धन पूर्णांक हो तो निम्न समाकल के अभिसरण की जांच कीजिए :

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx$$

SECTION - C/खण्ड – स

12 Prove that the set Q of rational numbers is not a complete ordered field.

सिद्ध करो कि परिमेय संख्याओ का समुच्चय Q पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं है।

13 Examine the following series for convergence and absolute convergence :

निम्न श्रेणी के अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए :

$$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}+\ldots\ldots$$

14 Show that between any two roots of $e^x\cos x=1$, there existe at least one root of $e^x\sin x=1$.

प्रदर्शित कीजिए कि समीकरण $e^x\cos x=1$, के किन्ही दो मूलों के मध्य समीकरण $e^x\sin x=1$ का कम से कम एक मूल विद्यमान होता है।

15 Show that the following integral is convergent :

सिद्ध कीजिए कि निम्न समाकल अभिसारी है :

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)\frac{dx}{x}$$