UA-1525

B.A./B. Sc. (Part-III) Examination, 2023

MATHEMATICS

PAPER - I

LINEAR ALGEBRA & COMPLEX ANALYSIS

Time allowed : **Three Hours**

Maximum Marks : **Science 75 Marks**

Arts 66 Marks

*This question paper contains **three** sections as under :*

Section-A ***खण्ड–अ*** ***Max. Marks (Science-10/Arts-5)***

*This section contains **one compulsory** question with **10** parts, having **02** parts from each unit, short answer in **20** words for each part. All questions carry **equal** marks.*

*इस खण्ड में **एक अनिवार्य** प्रश्न हैं, जिसमें प्रत्येक इकाई से **02** लघु प्रश्न लेते हुये कुल **10** लघु प्रश्न होंगे। प्रत्येक लघु प्रश्न का उत्तर **20** शब्दों से अधिक में न हो। सभी प्रश्नों के अंक **समान** हैं।*

Section-B ***खण्ड–ब*** ***Max. Marks-35 (Science/Arts)***

*This section contains **10** questions having **02** questions from each unit. Answer **5** questions (250 words each) selecting one question from each unit. All questions carry **equal** marks.*

*इस खण्ड में प्रत्येक इकाई से **02** प्रश्न लेते हुये कुल **10** प्रश्न हैं। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुए कुल **5** प्रश्नों के उत्तर देने हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **250** शब्दों से अधिक में न हो। सभी प्रश्नों के अंक **समान** हैं।*

Section-C ***खण्ड–स*** ***Max. Marks (Science-30/Arts-26)***

*This section contains **04** descriptive type questions (questions may have sub-division) covering all units but not more than one question from each unit. Answer any two questions (**500** words each). All questions carry **equal** marks.*

*इस खण्ड में **04** वर्णनात्मक प्रश्न होंगे। प्रश्न में भाग भी हो सकते है जो सभी इकाइयों में से दिये जायेंगे, किन्तु एक इकाई में से एक से अधिक प्रश्न नहीं होगा। कोई दो प्रश्नों के उत्तर दिये जाने है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **500** शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक **समान** हैं।*

SECTION-A / खण्ड–अ

1 (i) Define subspace of a vector space.
सदिश समष्टि की उपसमष्टि को परिभाषित कीजिए।

(ii) Define linearly independent vector.
रैखिक स्वतंत्र सदिश को परिभाषित कीजिए।

(iii) Define base of a vector space.
सदिश समष्टि के आधार को परिभाषित कीजिए।

(iv) Define quotient subspace.
विभाग उपसमष्टि को परिभाषित कीजिए।

(v) Find characteristic equation of matrix A.
मैट्रिक्स A की अभिलाक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

(vi) Write characteristic values of matrix A.
मैट्रिक्स A के अभिलाक्षणिक मान लिखिए।

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

(vii) If $Z=3+2i$ then write $\bar{Z}$ as ordered pair.
यदि $Z=3+2i$ हो तो $\bar{Z}$ को क्रमित युग्म में लिखिए।

(viii) Write Cauchy-Riemann equation for function $w=u+iv$.
फलन $w=u+iv$ के लिए कोशी–रीमान समीकरण लिखिए।

(ix) Define isogonal mapping.
अनुकोण प्रतिचित्रण को परिभाषित कीजिए।

(x) Find invariant point for transformation $W=\frac{2z+4}{5}$.
रूपांतरण $W=\frac{2z+4}{5}$ के लिए स्थिर बिन्दु ज्ञात कीजिए।

SECTION-B / खण्ड–ब

UNIT - I / इकाई – I

2 Prove that every field is a vector space over its subfield.
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र अपने उपक्षेत्र पर एक सदिश समष्टि होता है।

3 Show that the following matrices in the vector space $M(R)$ of all 2×2 matrices are linearly independent.
प्रदर्शित कीजिए कि 2×2 मैट्रिसेज की सदिश समष्टि $M(R)$ में निम्न मैट्रिसेज रैखिक स्वतंत्र है।

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \alpha_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \alpha_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

https://pyqlelo.com

UNIT - II / इकाई – II

4 Show that the set $S = \{(1, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1); (0, 1, 0)\}$ spans the vector space $V_3(R)$ but is not a basis set.

प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय $S = \{(1, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1); (0, 1, 0)\}$ सदिश समष्टि $V_3(R)$ की विस्तृति करता है परंतु एक आधार समुच्चय नहीं है।

5 If the mapping $t : V(F) \to V'(F)$ is one-one onto linear map then show that $t^{-1} : V'(F) \to V(F)$ will also be a linear map.

यदि प्रतिचित्रण $t : V(F) \to V'(F)$ एकैकी आच्छादक रैखिक प्रतिचित्रण है तो सिद्ध कीजिए कि $t^{-1} : V'(F) \to V(F)$ भी रैखिक प्रतिचित्रण होगा।

UNIT - III / इकाई – III

6 Prove that all the eigen values of a hermitian matrix are real.

सिद्ध कीजिए कि एक हर्मिसियन मैट्रिक्स के सभी अभिलाक्षणिक मूल वास्तविक होते हैं।

https://www.uokonline.com

7 Show that Matrix A satisfies its characteristics equation and hence find its inverse matrix A^{-1}.

प्रदर्शित कीजिए कि मैट्रिक्स A अपनी अभिलाक्षणिक समीकरण को संतुष्ट करती है तथा फलतः इसकी प्रति लोम मैट्रिक्स A^{-1} ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

UNIT - IV / इकाई – IV

8 Prove that $\lim_{Z \to 0} \frac{Z - \bar{Z}}{Z}$ does not exists.

सिद्ध कीजिए कि $\lim_{Z \to 0} \frac{Z - \bar{Z}}{Z}$ का अस्तित्व नहीं है।

9 Show that the function $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ is harmonic and find its harmonic conjugate.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ प्रसंवादी है तथा इसका प्रसंवादी संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

UNIT - V / इकाई – V

10 Find the bilinear transformation which maps $Z = 1, i, -1$ respectively onto $W = i, 0, -i$.

वह द्विरैखिक रूपांतरण ज्ञात कीजिए जो $Z = 1, i, -1$ को क्रमशः $W = i, 0, -i$ में प्रतिचित्रित करें।

11 Describe the inverse transformation $Z = \sqrt{w}$.

प्रतिलोम प्रतिचित्रिण $Z = \sqrt{w}$ की व्याख्या कीजिए।

SECTION-C / खण्ड–स

12 Prove that necessary and sufficient condition for a non-void subset W of a vector space $V(F)$ to be subspace of $V(F)$ is

$a, b \in F$ and $\alpha, \beta \in W \Rightarrow (a\alpha + b\beta) \in W$.

Hence show that the set

$W = \{(a, b, c) | a - 3b + 4c = 0, a, b, c \in R\}$

of 3-tuples is a subspace of the vector space $V_3(R)$.

सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के एक अरिक्त उपसमुच्चय W के लिए $V(F)$ की एक उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक एवम् पर्याप्त प्रतिबंध है

$a, b \in F$ और $\alpha, \beta \in W \Rightarrow (a\alpha + b\beta) \in W$

फलतः प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय

$W = \{(a, b, c) | a - 3b + 4c = 0, a, b, c \in R\}$

3-तुपलों के सदिश समष्टि $V_3(R)$ की एक उपसमष्टि है।

13 (a) Prove that any two basis of a finite dimensional vector space have same number of elements.

सिद्ध कीजिए कि एक परिमित विमीय सदिश समष्टि के किन्हीं दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है।

(b) State and prove Sylvester's law of nullity.

सिलवेस्टर का शून्यता का नियम कथन कर सिद्ध कीजिए।

https://www.uokonline.com

14 (a) Find eigen values and their corresponding eigen vectors of the matrix A.

मैट्रिक्स A के अभिलाक्षणिक मूल तथा उनके संगत अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Prove that the transformation $W = \frac{\bar{b}z - a}{\bar{a}z - b}$ maps the circle $|z| = 1$ on the circle $|W| = 1$ if $|a| \neq |b|$.

सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $W = \frac{\bar{b}z - a}{\bar{a}z - b}$ वृत्त $|z| = 1$ को वृत्त $|W| = 1$ में प्रतिचित्रित करता है यदि $|a| \neq |b|$.

15 Prove that the function $W = e^{-z^{-4}}$ is not analytic at origin although Cauchy-Riemann equations are satisfied at origin.

सिद्ध कीजिए कि फलन $W = e^{-z^{-4}}$ मूल बिन्दु पर विश्लेषिक नहीं है यद्यपि यह मूल बिन्दु पर कोशी–रीमान समीकरणों को संतुष्ट करता है।