This question paper contains 8+1 printed pages] .

1525

B.A./B.Sc. (Part III) Examination, 2018

MATHEMATICS

Paper I

LINEAR ALGEBRA & COMPLEX ANALYSIS

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : (Science : 75/Arts : 66)

*This question paper contains **three** sections as under :*

Section-A **खण्ड 'अ'** ***Max. Marks***

(Sciecne-10/Arts-5)

*This section contains **one** compulsory question with 10 parts, having 2 parts from each unit, short answer in 20 words for each part . All questions carry equal marks.*

इस खण्ड में एक अनिवार्य प्रश्न है जिसमें प्रत्येक इकाई से 2 लघु प्रश्न लेते हुये कुल 10 लघु प्रश्न होंगे। प्रत्येक लघु प्रश्न का उत्तर 20 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. (*i*) Define Vector space.

सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिए।

(*ii*) Define linear span.

एकघातीय विस्तृति को परिभाषित कीजिए।

(*iii*) Define basis of a vector space.

सदिश समष्टि के आधार को परिभाषित कीजिए।

(*iv*) Define linear mapping.

रैखिक प्रतिचित्रण को परिभाषित कीजिए।

(*v*) Define characteristic equation.

अभिलाक्षणिक समीकरण को परिभाषित कीजिए।

(*vi*) State the Cayley-Hamilton theorem.

कैली-हैमिल्टन प्रमेय का कथन लिखिए।

(*vii*) Define Continuity.

सांत्यता को परिभाषित कीजिए।

https://pyqlelo.com

(viii) Define analytic function.

विश्लेषिक फलन को परिभाषित कीजिए।

(ix) Define conformal mapping.

अनुकोण प्रतिचित्रण को परिभाषित कीजिए।

(x) Define fixed points of a Bilinear Transformation.

द्विरैखिक रूपान्तरण के निश्चर बिन्दु को परिभाषित कीजिए।

Section B/खण्ड-ब

UNIT-I/इकाई-I

2. Prove that the intersection of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space V(F) is also a subspace of V(F).

सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टियों W_1 तथा W_2 का सर्वनिष्ठ भी V(F) की एक उपसमष्टि होती है।

3. If possible, express the vector $\alpha = (0, 4, 20) \in V_3(R)$ as a linear combination of the following vectors :

यदि संभव हो तो सदिश $\alpha = (0, 4, 20) \in V_3(R)$ को निम्न सदिशों के एकघात संचय के रूप में व्यक्त कीजिए :

$\alpha_1 = (2, 1, -1)$; $\alpha_2 = (-1, 0, 3)$; $\alpha_3 = (0, 1, 5)$.

UNIT-II/इकाई-II

4. Prove that every LI subset of a finite dimensional vector space V(F) is either a basis of V or can be extended to form a basis of V.

सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) का प्रत्येक LI उपसमुच्चय या तो V का आधार होता है या उसे V का आधार निर्मित करने के लिए विस्तृत किया जा सकता है।

5. Prove that the mapping t defined from $V_2(R)$ to $V_3(R)$ by $t(a, b) = (a + b, a - b, b)$ $\forall$ $a, b \in R$ is a linear transformation. Also find the null space and nullity of t.

सिद्ध कीजिए कि $V_2(R)$ से $V_3(R)$ में परिभाषित निम्न प्रतिचित्रण t $t(a, b) = (a + b, a - b, b)$ $\forall$ $a, b \in R$ एक रैखिक रूपान्तरण है। t की शून्य समष्टि तथा शून्यता भी ज्ञात कीजिए।

UNIT-III/इकाई-III

6. Show that the following matrix A satisfies Cayley-Hamilton theorem. Hence find it inverse A^{-1}.

प्रदिर्शत कीजिए कि निम्न मैट्रिक्स A कैली-हेमिल्टन प्रमेय को संतुष्ट करती है। फलत: उसकी प्रतिलोम मैट्रिक्स A^{-1} ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

7. गणना कीजिए (calculate) $2A^5 - 3A^4 + A^2 - 4I$ जहाँ (where) :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

UNIT-IV/इकाई-IV

8. Prove that the following function satisfy Laplace equation. Also determine the corresponding analytic function :

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करता है, संगत विश्लेषिक फलन $F(z) = u + iv$ भी ज्ञात कीजिए :

$$u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$$

9. Prove that the following function u is harmonic. Also find its conjugate function :

सिद्ध कीजिए कि दिया गया फलन u प्रसंवादी है। उसका संयुग्मी प्रसंवादी भी ज्ञात कीजिए :

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2)$$

UNIT-V/इकाई-V

10. Prove that the bilinear transformation $w = \frac{az - b}{cz + d}$ is a combination of elementary transformations.

सिद्ध कीजिए कि द्विरैखिक रूपान्तरण $w = \frac{az + b}{cz + d}$ प्रारंभिक रूपान्तरणों का संयुग्म है।

11. Find all the Mobius transformations which transform the unit circular disc $|z| \leq 1$ into unit circular disc $|w| \leq 1$.

वे सभी मोबियस रूपांतरण ज्ञात कीजिए जो इकाई वृत्त चक्रीय $|z| \leq 1$ को इकाई वृत्त चक्रीय $|w| \leq 1$ में रूपांतरित करती है।

https://pyqlelo.com

12. Prove that if w_1 and w_2 are two subspaces of a finite dimensional vector space V(F), then :

सिद्ध कीजिए कि यदि w_1 व w_2 एक परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टियाँ हों तो

$$\dim (w_1 + w_2) = \dim w_1 + \dim w_2 - \dim (w_1 \cap w_2)$$

13. Find the eigen values and their corresponding eigen vectors of the following matrix :

निम्न मैट्रिक्स A के अभिलाक्षणिक मूल तथा उसके संगत अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

14. (a) Determine the polar form of Cauchy-Riemann equation.

कौशी-रीमान समीकरण का ध्रुवीय रूप ज्ञात कीजिए।

(b) z का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए जबकि :

UOKonline.com

Find the locus of z when :

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| \geq 2$$

15. Prove that the necessary and sufficient condition for a non-void subset W of a vector space V(F) to be a subspace of V(F) is :

सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V(F) के एक अरिक्त उपसमुच्चय W के लिए V(F) की एक उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध है :

$$a, b \in F \text{ and } \alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$$