QS–1525

B.A. / B. Sc. (Part-III) Examination, 2024

MATHEMATICS

Paper - I

LINEAR ALGEBRA & COMPLEX ANALYSIS

Time Allowed : **Three Hours**

Maximum Marks : **Science 75 Marks**
Arts 66 Marks

*This question paper contains **three** sections as under :*

Section-A

खण्ड–अ

Max. Marks (Science-10/Arts-5)

*This section contains **one compulsory** question with **10** parts, having **2** parts from each unit, **short** answer in **20** words for each part. All questions carry **equal** marks.*

*इस खण्ड में **एक अनिवार्य** प्रश्न है, जिसमें प्रत्येक इकाई से **2** लघु प्रश्न लेते हुए कुल **10** लघु प्रश्न होंगे। प्रत्येक लघु प्रश्न का उत्तर **20** शब्दों से अधिक में न हो। सभी प्रश्नों के अंक **समान** है।*

Section-B

खण्ड–ब

Max. Marks-35 (Science/Arts)

*This section contains **10** questions having **2** questions from each unit. Answer **5** questions (250 words each) selecting one question from each unit. All questions carry **equal** marks.*

*इस खण्ड में प्रत्येक इकाई से **2** प्रश्न लेते हुये कुल **10** प्रश्न हैं। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुए कुल **5** प्रश्नों के उत्तर देने हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **250** शब्दों से अधिक में न हो। सभी प्रश्नों के अंक **समान** हैं।*

Section-C

खण्ड–स

Max. Marks (Science-30/Arts-26)

*This section contains 4 descriptive type questions (questions may have sub-division) covering all units but not more than one question from each unit. Answer any two questions **(500** words each). All questions carry **equal** marks.*

*इस खण्ड में **4** वर्णनात्मक प्रश्न होंगे। प्रश्न में भाग भी हो सकते है जो सभी इकाइयों में से दिये जायेंगे, किन्तु एक इकाई में से एक से अधिक प्रश्न नहीं होगा। कोई दो प्रश्नों के उत्तर दिये जाने है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **500** शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक **समान** हैं।*

https://pyqs.com

SECTION-A
खण्ड—अ

1 (i) Define direct sum of two sub-spaces.
दो उप समष्टियों के प्रत्यक्ष योग को परिभाषित कीजिए।

(ii) Let $V(F)$ be a vector space then for any $a, b \in F$ and $u(\neq 0) \in V$ show that $au = bu \Rightarrow a = b$.
माना $V(F)$ एक सदिश समष्टि है। तब किन्हीं $a, b \in F$ तथा $u(\neq 0) \in V$ के लिए प्रदर्शित कीजिए $au = bu \Rightarrow a = b$.

(iii) Define basis of a vector space.
सदिश समष्टि के आधार को परिभाषित कीजिए।

(iv) Define Kernel of a linear transformation.
किसी रैखिक रूपान्तरण की अष्टि को परिभाषित कीजिए।

(v) Define characteristic vector or a Matrix.
आव्यूह के अभिलाक्षणिक सदिश को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define minimal polynomial of a matrix A.
किसी आव्यूह A के अल्पिष्ठ बहुपद को परिभाषित कीजिए।

(vii) For any complex number z, determine $\arg(z) + \arg(\bar{z})$.
किसी सम्मिश्र संख्या z के लिए $\arg(z) + \arg(\bar{z})$ का मान ज्ञात कीजिए।

(viii) Define continuity of a complex valued function.
किसी सम्मिश्र मान फलन की सांतत्यता को परिभाषित कीजिए।

(ix) Write the normal form of a Bilinear transformation.
द्विरैखिक रूपान्तरण का सामान्य रूप लिखिए।

(x) Describe the magnification transformation.
आवर्धन रूपान्तरण को समझाइये।

SECTION - B
खण्ड – ब

UNIT - I
इकाई – I

2 If possible express the vector $\alpha = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ in the vector space of 2×2 matrices, as $L.C.$ of the following vectors :

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

यदि सम्भव हो तो, 2×2 आव्यूहों की सदिश समष्टि में सदिश $\alpha = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ को निम्न सदिशों के एकघात संचय के रूप में व्यक्त कीजिए :

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

https://pyqielu.com

3 Examine whether the set $R^2 = \{(a,b) : a,b \in R\}$ of all ordered pairs of real numbers is a vector space or not over the field R of real numbers with respect to the operations defined as follows?
जाँच कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय $R^2 = \{(a,b) : a,b \in R\}$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर निम्न प्रकार परिभाषित संक्रियाओं के सापेक्ष सदिश समष्टि है या नहीं?

$(a,b)+(c,d) = (a+c,\ 0),\ \alpha(a,\ b) = (\alpha a, 0)$

$\forall (a,b),(c,d) \in R^2,\ \forall \alpha \in R.$

UNIT - II
इकाई – II

4 Prove that every $L.I.$ subset of a finite dimensional vector space $V(F)$ is either a basis of V or can be extended to form a basis of V.
सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ का प्रत्येक $L.I.$ उपसमुच्चय या तो V का आधार होता है या उसे V का आधार बनाने के लिए विस्तृत किया जा सकता है।

5 If $t : U(F) \to V(F)$ is a linear transformation then show t is non-singular iff the image of $L.I.$ set under t in U is $L.I.$ in V.
यदि $t : U(F) \to V(F)$ एक रैखिक रूपान्तरण है तो सिद्ध कीजिए t अव्युत्क्रमणीय होगा यदि और केवल यदि U के किसी $L.I.$ उपसमुच्चय का t के सापेक्ष प्रतिबिम्ब समुच्चय V में $L.I.$ समुच्चय है।

UNIT - III
इकाई – III

6 Prove that the characteristic roots of a square A is equal to the sum of its diagonal element.
सिद्ध कीजिए किसी वर्ग आव्यूह A के सभी अभिलाक्षणिक मानों का योग उसके विकर्ण अवयवों के योग के बराबर होता है।

7 Prove that characteristic roots of an idempotent are either zero or unity.
सिद्ध कीजिए वर्गसम आव्यूह के अभिलाक्षणिक मान या तो शून्य होते हैं या इकाई।

UNIT - IV
इकाई – IV

8 Determine an analytic function $f(z) = u + iv$ in terms of z where $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$.
विश्लेषिक फलन $f(z) = u + iv$ को z के पदों में ज्ञात कीजिए जहाँ $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$.

9 Prove that the triangle joining three points z_1, z_2 and z_3 on the complex plane is equilateral, if
$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$
सिद्ध कीजिए कि सम्मिश्र समतल में z_1, z_2 तथा z_3 बिन्दुओं को मिलाने वाला त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होगा, यदि
$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$

UNIT - V
इकाई – V

10 Find the image of the infinite strip $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ under the transformation $w = \frac{1}{z}$.

रूपान्तरण $w = \frac{1}{z}$ के अन्तर्गत अनन्त पट्टी $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ का प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

11 Find the bilinear transformation that maps the points $z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -1$ into the points $w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = \infty$.

वह द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -1$ को क्रमशः बिन्दुओं $w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = \infty$ में प्रतिचित्रित करता है।

SECTION - C
खण्ड – स

12 Show that a non-void subset W of a vector space $V(F)$ is a subspace of $V(F)$ if and only if

$\forall a, b \in F;\ \forall \alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$

सिद्ध कीजिए सदिश समष्टि $V(F)$ का एक अरिक्त उपसमुच्चय W इसकी एक उपसमष्टि होगा यदि और केवल यदि

$\forall a, b \in F;\ \forall \alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$

13 If W be a subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$ then show that :

$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W$$

यदि W एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की एक उपसमष्टि है तो प्रदर्शित कीजिए :

$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W$$

14 Show that the function $f(z)$ defined below, is not analytic at $z = 0$ although C-R equations are satisfied at that point

$$f(z) = e^{-z^{-4}},\ z \neq 0;\ f(0) = 0$$

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न प्रकार परिभाषित फलन $f(z),\ z = 0$ पर विश्लेषिक नहीं है यद्यपि उस बिन्दु पर कोशी रीमान समीकरणों को सन्तुष्ट करता है

$$f(z) = e^{-z^{-4}},\ z \neq 0;\ f(0) = 0$$

15 State and prove sufficient condition for a mapping to be conformal.

किसी प्रतिचित्रण के अनुकोण प्रतिचित्रण होने की पर्याप्त शर्त लिखिए एवं सत्यापित कीजिए।

---

http://pyqlelo.com