UOKonline.com

B.A./B.Sc. (Part II) EXAMINATION, 2016
MATHEMATICS
Paper I—(Real Analysis)

Time Allowed : Three Hours Maximum Marks : Science 75/Arts 66

Section-A/खण्ड-अ

1. (i) Define order axioms.
क्रम अभिगृहीत परिभाषित कीजिये।

(ii) Define limit point of a set.
समुच्चय का सीमा विन्दु परिभाषित कीजिये।

(iii) Define convergence of Hyper-harmonic series for infinite series.
अनन्त श्रेणी, हायपर-हारमोनिक श्रेणी के अभिसरण की शर्तें लिखिये।

(iv) Define logarithmic ratio test for infinite series.
अनन्त श्रेणियों के लिए लघुगणकीय अनुपात परीक्षण लिखिये।

(v) Define equivalent sets.
तुल्य समुच्चय को परिभाषित कीजिये।

UOKonline.com

(vi) Define perfect set.
परिपूर्ण समुच्चय को परिभाषित कीजिये।

(vii) Define removable discontinuity.
निराकरणीय असांतत्य को परिभाषित कीजिये।

(viii) State Darboux theorem.
डार्बू प्रमेय का कथन लिखिये।

(ix) Define primitive.
पूवर्ग की परिभाषा लिखिये।

(x) Define absolute and conditional convergence.
निरपेक्ष एवं सापेक्ष अभिसरण को परिभाषित कीजिये।

Section-B/खण्ड-ब

UNIT-I/इकाई-I

2. If $x, y \in R$, then prove that :
यदि $x, y \in R$, तो सिद्ध कीजिये:

(i) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (ii) $|x - y| \geq |x| - |y|$.

3. Prove that every infinite bounded set has at least one limit point.
सिद्ध कीजिये प्रत्येक असीमित परिबद्ध समुच्चय का कम-से-कम एक सीमा विन्दु होता है।

UNIT-II/इकाई-II

4. Test the convergence of the following series :
निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण का परीक्षण कीजिये:

(i) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{3n-1} + \ldots$

(ii) $1 + \frac{3}{7}x + \frac{3.6}{7.10}x^2 + \frac{3.6.9}{7.10.13}x^3 + \ldots$ 3+4

5. A necessary condition for the convergence of a series $\sum u_n$ is that
प्रत्येक श्रेणी के $\sum u_n$ अभिसारी होने के लिए आवश्यक शर्त है कि

$$\lim u_n = 0$$

but conversely not necessary true. Prove it.
किन्तु इसका विलोम सदैव सत्य हो आवश्यक नहीं है। सिद्ध कीजिये।

UNIT-III/इकाई-III

6. Define countable set and prove that the closed interval [0, 1] is not coutable. 1+6
गणनीय समुच्चय को परिभाषित कीजिये तथा सिद्ध कीजिये कि संवृत अन्तराल [0, 1] गणनीय नहीं है।

7. Prove that the union of a countable family of countable sets is countable.
सिद्ध कीजिये कि गणनीय समुच्चय का गणनीय कुल का संघ भी गणनीय समुच्चय होता है।

UNIT-IV/इकाई-IV

8. Prove that if a function f is continuous on [a, b], then it is bounded in that interval.
सिद्ध कीजिये कि यदि फलन f संवृत अन्तराल [a, b] में संतत है तो वह उस अन्तराल में परिबद्ध होता है।

9. State and prove Mostest theorem.
मोस्टेस्ट प्रमेय का कथन लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

UNIT-V/इकाई-V

10. Prove that every monotonic function f is R-integrable.
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक एकदिष्ट फलन f, R-समाकलनीय होता है।

11. Test the convergence of the following integral :
निम्न समाकलनों के अभिसरण का परीक्षण कीजिये:

(i) $\int_a^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x^2}dx,\ a>0$ (ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3+x^2}{x^6+1}dx$.

Section-C/खण्ड-स

12. (a) Prove that the set Q of rational numbers is not a complete ordered field.
सिद्ध कीजिये कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं है।

(b) Show that the following function is continuous everywhere but differential coefficient does not exist at $x = 0$.
सिद्ध कीजिये कि निम्न फलन सर्वत्र संतत है परन्तु $x = 0$ पर अवकलज गुणांक विद्यमान नहीं है:

UOKonline.com

$$f(x)=\begin{cases} x\left(1+\frac{1}{3}\sin\log x^2\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

13. (a) If $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, then show that f is R-integrable on $[0, 1]$.
यदि $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, तो सिद्ध कीजिये कि f अन्तराल $[0, 1]$ पर R-समाकलनीय है।

(b) Discuss the uniform convergence of the given series in the interval $[0, 1]$.
अन्तराल $[0, 1]$ में निम्न श्रेणी के एकसमान अभिसारी होने का विवेचन कीजिये:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x).$$

14. (a) If E be a bounded closed set of real number then each open cover of E has a finite subcover. Prove it.
यदि E वास्तविक संख्याओं का कोई परिबद्ध एवं संवृत समुच्चय हो तो E के प्रत्येक विवृत आवरक के लिए एक परिमित उपआवरक विद्यमान होता है। सिद्ध कीजिये।

(b) Prove that a sequence is convergent if and only if it is Cauchy's sequence.
सिद्ध कीजिये कि एक अनुक्रम अभिसारी है यदि और केवल यदि यह कोशी अनुक्रम है।

15. (a) Test the convergence of the following integral :
निम्न समाकल के अभिसरण का परीक्षण कीजिये:

UOKonline.com

(i) $\int_0^1 \frac{dx}{x^5(1+x^2)}$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$.

(b) (i) Apply Lagrange's mean value theorem to prove that :
लाग्रांज मध्यमान प्रमेय की सहायता से सिद्ध कीजिये कि:

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x,\ \forall x > 0.$$

(ii) Find expension of sin x with the help of Maclaurin's theorem by remainder of Lagrange.
मेक्लोरिन प्रमेय के [illegible] फलन sin x का प्रसार कीजिये।