This question paper contains 7 printed pages]

1654

M.A./M.Sc. (Previous) Examination, 2019

MATHEMATICS

Paper IV

(Special Functions and Integral Equations)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 100

*This question paper contains **three** sections as under :*

Section-A **खण्ड 'अ'** ***Max. Marks-10***

*This section contains **one** compulsory question with **10** parts, having **2** parts from each unit, short answer in **20** words for each part. **All** questions carry equal marks.*

*इस खण्ड में **एक** अनिवार्य प्रश्न है जिसमें प्रत्येक इकाई से **2** लघु प्रश्न लेते हुए कुल **10** लघु प्रश्न होंगे। प्रत्येक लघु प्रश्न का उत्तर **20** शब्दों से अधिक में न हो। **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Section-B **खण्ड 'ब'** ***Max. Marks-50***

*This section contains **10** questions having 2 questions from each unit. Answer **5** questions (250 words each) selecting **one** question from each unit. All questions carry equal marks.*

*इस खण्ड में प्रत्येक इकाई से **2** प्रश्न लेते हुए कुल 10 प्रश्न हैं। प्रत्येक इकाई से **एक** प्रश्न का चयन करते हुए कुल 5 प्रश्नों के उत्तर देने हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **250** शब्दों से अधिक में न हो। **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Section-C **खण्ड 'स'** ***Max. Marks-40***

***This section contains 4 descriptive type questions (questions may have sub-divisions) covering all units but not more than one question from each unit. Answer any two questions (500 words each). All questions carry** equal marks.*

*इस खण्ड में 4 प्रश्न वर्णनात्मक होंगे। (प्रश्नों में उप-भाग भी हो सकते हैं) जो सभी इकाइयों में से दिये जायेंगे, किन्तु एक इकाई से एक से अधिक प्रश्न नहीं होगा। किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दिये जाने हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **500** शब्दों से अधिक न हो। **सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।***

http://www.uokonline.com

Section A

1. (*a*) Give the Hypergeometric differential equation.

(*b*) State Whipple's theorem.

(*c*) Give the generating function of Bessel functions.

(*d*) Define the confluent hypergeometric function.

(*e*) Define Fredholm integral equation of first kind.

(*f*) Define separable kernels.

(*g*) For the integral equation :

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\, g(t)\, dt,$$

define the iterated kernel $k_n(x, t)$.

(*h*) Define the resolved kernel of Volterra integral equation of the second kind.

(*i*) Give the fundamental theorem of Laplace Transform.

(*j*) Define the Inverse Laplace Transform.

Section B

UNIT-I

2. Prove the integral representation for ${}_2F_1$:

$${}_2F_1(a, b, c, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-x)^{-a}\, dt$$

where $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0$ and $|x| < 1$.

3. Establish :

$$[a + (b-c)x]\, F = a(1-x)\, F(at) - \frac{(c-a)(c-b)}{c} \times xF(ct).$$

UNIT-II

4. For $t \neq 0$ and for all finite z, prove that :

$$\exp\left[\frac{1}{2}z\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n.$$

http://www.uokonline.com

5. Integral representation for confluent hypergeometric functions for $\beta > \alpha > 0$:

$$ {}_1F_1(\alpha, \beta, x) = \frac{\overline{|(\beta)}}{\overline{|(\alpha)}\overline{|(\beta-\alpha)}} \int_0^1 (1-t)^{\beta-\alpha-1} t^{\alpha-1} e^{xt}\, dt . $$

UNIT-III

6. Show that the function $g(x) = x\, e^x$ is a solution of the Volterra integral equation :

$$ g(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\, g(t)\, dt . $$

7. Solve :

$$ g(x) = (1+x)^2 + \int_{-1}^1 (xt + x^2t^2)\, g(t)\, dt . $$

UNIT-IV

8. Solve the integral equation :

$$ g(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (1-3xt)\, g(t)\, dt . $$

For what values of λ, the solution does not exist ?

9. Using resolvent kernel method, solve :

$$ g(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 e^{x-t} 2(t)\, dt . $$

UNIT-V

10. If $L\{F(t)\} = f(p)$, then :

$$ L\{t^n\, F(t)\} = (r)^n \frac{d^n}{dp^n} f(p) = (r)^n f^n(p) $$

where $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

11. Define convolution. Prove that the convolution operation is associative.

Section C

12. State and prove the convolution theorem.

13. Show that the integral equation :

$$ g(x) = f(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x+t)\, g(t)\, dt , $$

possesses no solution for $f(x) = x$, but it possesses infinitely many solutions for $f(x) = 1$.

http://www.uokonline.com

14. Define generalized hypergeometric functions

$$F(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, p_q; z)$$

State and prove the Dixon's theorem.

15. Prove that :

(*i*) $x J_n^1(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x)$

(*ii*) $x J_n^1(x) = -n J_n(x) + x J_{n-1}(x)$

(*iii*) $2J_n^1(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$

(*iv*) $\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)$.

http://www.uokonline.com
http://www.uokonline.com
https://pyqlelo.com
http://www.uokonline.com
Whatsapp @ 9300930012
Your old paper & get 10/-
पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,
Paytm or Google Pay से