UB-1654

M. A. / M. Sc.
(Previous) Examination, 2023

MATHEMATICS

Paper - IV

SPECIAL FUNCTIONS & INTEGRAL EQUATIONS

Time Allowed : **Three Hours**

Maximum Marks : **100**

*This question paper contains **three** sections as under :*

Section-A खण्ड–अ ***Max. Marks-10***

This section contains one compulsory question with 10 parts, having 2 parts from each unit, short answer in 20 words for each part. All questions carry equal marks.

इस खण्ड में एक अनिवार्य प्रश्न है जिसमें प्रत्येक इकाई से 02 लघु प्रश्न लेते हुये कुल 10 लघु प्रश्न होंगे। प्रत्येक लघु प्रश्न का उत्तर 20 शब्दों से अधिक में न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Section-B खण्ड–ब ***Max. Marks-50***

*This section contains **10** questions having 2 questions from each unit. Answer 5 questions (250 words each) selecting one question from each unit. All questions carry **equal** marks.*

इस खण्ड में प्रत्येक इकाई से 02 प्रश्न लेते हुये कुल 10 प्रश्न है। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुये कुल 05 प्रश्नों के उत्तर देने हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Section-C खण्ड–स ***Max. Marks-40***

*This section contains **04** descriptive type questions (questions may have sub division) covering all units but not more than one question from each unit. Answer any two questions. (500 words each). All questions carry **equal** marks.*

इस खण्ड में 04 वर्णनात्मक प्रश्न होंगे। प्रश्न में भाग भी हो सकते हैं जो सभी इकाइयों में से दिये जायेंगे, किन्तु एक इकाई में से एक से अधिक प्रश्न नहीं होगा। कोई दो प्रश्नों के उत्तर दिये जाने हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 500 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

SECTION - A

1 (a) Write down the hypergeometric equation.

(b) Define Kummer's theorem.

(c) Write the statements of Dixon's theorem with representation.

(d) Write the definition of Inverse Laplace transform of $f(s)$.

(e) Define Bessel's function of the first kind of order n.

(f) Write generating function for the Bessel's function $J_n(x)$.

(g) State Fredholm integral equation of Second Kind.

(h) Write down the confluent hypergeometric function.

(i) State Whipple's theorem.

(j) Write the Resolvent or Reciprocal Kernel.

SECTION - B

UNIT - I

2 Solve the Fredholm integral equation of the Second Kind,

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 (xt^2 + x^2 t)\, y(t)\, dt$$

3 Solve :

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x-t} y(t)\, dt$$

UNIT - II

4 Determine the iterated Kernel:
$K(x, t) = e^x \cos t$; $a = 0$ and $b = \pi$.

5 Solve :

$$g(x) = \cos x - x - 2 + \int_0^x (t - x)\, g(t)\, dt$$

UNIT - III

6 Solve the Volterra integral equation

$$y(x) = 1 + \int_0^x xt\, y(t)\, dt$$

7 Show that the homogenous equation

$$y(x) - \lambda \int_0^1 (3x-2)\, ty(t)\, dt = 0$$ has no characteristic numbers and eigen functions.

UNIT - IV

8 Solve by method of successive approximation

$$y(x) = \frac{3}{2} e^x - \frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 ty(t)\, dt$$

9 Solve :

$$y(x) = x + \int_0^x (t-y)\, y(t)\, dt$$ with the help of Resolvent Kernel.

UNIT - V

10 Show that

(a) $$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt = \log b - \log a$$

(b) Prove that :

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \left(\frac{2n}{x}\right) J_n(x)$$

$$2\, J_n = x\,(J_{n-1} + J_{n+1})$$

11 If $f(x)$ is continuous for all $x \geq 0$ and be exponential order as $x \to \alpha$ and $f(x)$ is of class A then show that

$$\underset{x \to 0}{Lt}\ f(x) = \underset{p \to \alpha}{Lt}\ p\, f(p)$$

SECTION - C

12 Compute:

(i) $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ (ii) $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$ (iii) $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$

https://pyqlelo.com

13. Under certain limitations on the values of a, b, m and n prove that

$$\int_0^{\alpha}\int_0^{\alpha} e^{-(ax^2+by^2)}\, x^{2m-1}\, y^{2n-1}\, dx\, dy = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{4a^m\, b^n}$$

14 Write down the Legendre Duplication Formula and deduce that if n is a positive integer then show that

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{2n!}{2^{2n}\, n!}\,\pi^{1/2}$$

15. (i) Write the Bessel's function $J_n(x)$.

(ii) If $R_e(b) > R_e(a) > 0$, the integral representation of the confluent hypergeometric function is

$$1F_1(a; b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}$$

$$\int_0^1 e^{zt}\, t^{a-1}\,(1-t)^{b-a-1}\, dt \text{ and deduce}$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(c)_n \cdot n!} = 1F_1(a; c; z)$$

https://pyqlelo.com